

MATEMATISKE MODELLER

Den hydrostatiske ligning

Hydrostatisk ligning R ny.wpd

Omskrivning af tilstandsligningen

Tilstandsligningen for luftarter, der viser sammenhængen mellem en ideal luftarts tryk p , rumfang V , antal mol n og temperaturen T ,

$$p V = n R T$$

kan omskrives til en form, der indeholder Boltzmanns konstant k og middelmolekylmassen m af atmosfærisk luft og luftens massefylde . Bemærk, at gaskonstanten

$$R = k N_A$$

hvor N_A er Avogadros tal, antal molekyler/mol. Gaskonstanten R har enhederne J/(mol K). Massefylden (densiteten) $\rho = M/V$, hvor M er massen af et givet rumfang V luft. Betragt ét mol luftmolekyler. Deres masse $M = N_A m$ det tilsvarende rumfang af $n = 1$ mol er ud fra tilstandsligningen $V = R T/p$. Så bliver massefylden:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{N_A \cdot m}{R \cdot T/p} = \frac{N_A \cdot m}{(k N_A) \cdot T/p} = \frac{p \cdot m}{k \cdot T}$$

Slutresultatet er vigtigt, idet det giver os mulighed for at udtrykke luftens densitet som funktion af lufttrykket p og den absolutte temperatur T .

Øvelse 1

Indsæt standardtrykket p_0 ved havoverfladen og $T = 273$ K, Boltzmanns konstant k og luftens middelmolekylmassen m . Brug SI enheder for alle størrelser, så resultatet bliver densiteten i kilo per kubikmeter. Hvad bliver luftens densitet ρ_0 ved havoverfladen? Stemmer dit resultat med tabelværdien (se Tabel I)?

Atmosfærens skalahøjde

Begrebet skalahøjde H_p er nyttigt, når man arbejder med den atmosfæriske fysik. Begrebet opstår, når man tænker sig, at hele atmosfæren har samme densitet og befinder sig i et tyndt lag omkring jorden. I virkeligheden aftager atmosfærens densitet og tryk jo med højden, og atmosfæren kan spores, omend ganske sparsomt, flere hundrede kilometer fra jordens overflade.

ATMOSFÆRISK FYSIK - VIGTIGE KONSTANTER			
Størrelse	Værdi	Størrelse	Værdi
Boltzmanns konstant	$k = 1,381 \text{ E-23 J/K}$	Middelmolekylmassen for tør luft	$m = 4,8097 \text{ E-26 kg}$
Gaskonstanten	$R = 8,3142 \text{ J/(mol K)}$	Avogadros tal	$N_A = 6,022 \text{ E+23}$
Gaskonstanten for tør luft	$R_A = 287,06 \text{ J/(kg K)}$	Molmassen af tør luft	$M_A = 0,028964 \text{ kg/mol}$
Densiteten af tør luft ved STP	$\rho_0 = 1,29304 \text{ kg/m}^3$	Antalstæthed af tør luft ved STP	$N_0 = 2,688 \text{ E+25 per m}^3$
Volumen per mol tør luft ved STP	$V_0 = 22,4 \text{ liter} = 0,0224 \text{ m}^3$	Troposfærisk aerosol skalahøjde	$H_A = 1000 \text{ meter}$
Trykket af tør luft ved STP	$p_0 = 101325 \text{ N/m}^2 = 101325 \text{ Pascal} = 1013,25 \text{ hPa}$	Atmosfærisk lufts skalahøjde	$H_p = 7982 \text{ meter}$
Tyngdeacceleration	$g = 9,816 \text{ m/s}^2$	Brydningsindekset af tør luft ved STP	$n_R = 1,000292$

Tabel I: Her er nogle vigtige konstanter, som man får brug for, når man studerer atmosfærens fysik. Bemærk, at STP betyder "standard temperatur og tryk" og svarer her til $T = 273 \text{ K}$ og $p = 1 \text{ atm}$.

Skalahøjden H_p kan defineres således, at antalstætheden N_0 ved havoverfladen multipliceret med skalahøjden svarer til antallet af luftmolekyler per arealenheden hele vejen fra jordens overflade til atmosfæren forsvinder ude i rummet. Vi vil om lidt være i stand til at beregne skalahøjden. Men først skal vi se på en ligning, der beskriver atmosfærens tryk- og densitetsvariation som funktion af højden h over havet.

Den hydrostatiske ligning

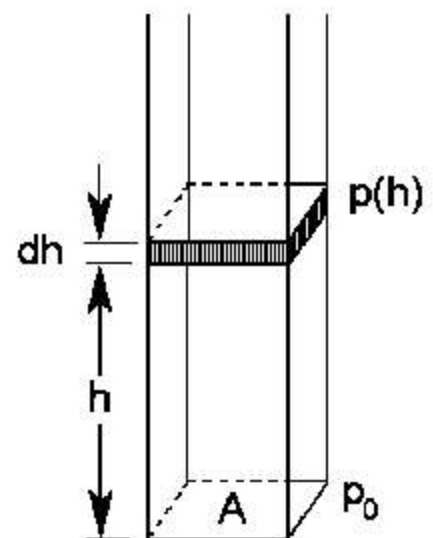
Figur 1 viser en luftsøjle med tværsnitsareal A . Læg mærke til det lille segment i højden h med tykkelsen dh . Vi betegner trykket som funktion af højden $p(h)$, og standardtrykket ved overfladen p_0 . Densiteten versus højde er $\rho(h)$, og jordens tyngdeacceleration betegnes g og antages at være ca. konstant op til de højder, der kommer på tale i denne sammenhæng.

Newtons anden lov fortæller os om størrelsen af kraften, der virker nedad på luftsegmentet:

$$F_{ned} = \text{masse} \cdot g = A \cdot dh \cdot \rho \cdot g$$

Den opadgående kraft skyldes trykforskellen dp mellem oversiden og undersiden af luftsegmentet:

$$F_{op} = A \cdot (p_{\text{øverst}} - p_{\text{nederst}}) = -A \cdot dp$$



Figur 1: $dp/dh = -\rho \cdot g$

Læg mærke til, at $dp = p_{\text{øverst}} - p_{\text{nederst}}$ er negativ, fordi trykket falder, når højden stiger. Derfor skal der bruges et minustegn foran dp , så den opadgående kraft bliver til en positiv størrelse.

Når luften er i ligevægt, vil den nedadrettede og den opadrettede kraft på luftsegmentet være ens:

$$F_{\text{ned}} = F_{\text{op}} \quad \Leftrightarrow \quad A \, dh \, g = - A \, dp \quad \Leftrightarrow \quad dp/dh = - \quad g$$

Slutresultatet betegnes *den hydrostatiske ligning*, og ligningen er én af den atmosfæriske fysiks grundlæggende lovmæssigheder.

Ligningerne kombineres

Kombineres $dp/dh = - \quad g$ med tilstandsligningen for atmosfæren, der blev fundet på side 1, får man:

$$\frac{dp}{dh} = -\rho \cdot g = -p \cdot \frac{m \cdot g}{k \cdot T}$$

Ligningen er en *differentialligning* for trykket p som funktion af højden h . Alle størrelserne i brøken til højre er konstanter, idet denne model forudsætter, at temperaturen er konstant. Derfor er løsningen til denne ligning

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{m \cdot g \cdot h}{k \cdot T}}$$

Øvelse 2

Læg mærke til, at eksponentens tæller er beliggenhedsenergien $E_{\text{POT}} = mgh$ for et luftmolekyle, og nævneren er 2/3 af luftmolekylernes middelbevægelsesenergi (da $E_{\text{KIN}} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} kT$). Sæt løsningen ind i differentialligningen, og bekræft, at løsningen er i orden. VINK: Der er tale om en sammensat funktion med h som den variable størrelse.

Øvelse 3

Gør rede for at højden $h_{\frac{1}{2}}$, hvor det atmosfæriske tryk er halvt så stort som ved havoverfladen, er givet ved:

$$h_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2 \cdot k \cdot T}{m \cdot g}$$

Indsæt konstanter fra Tabel I og vis, at $h_{\frac{1}{2}} = 5535$ meter.

Bemærk, at dette resultat bygger på den isothermiske atmosfæremodel, hvorimod temperaturen i troposfæren i virkeligheden falder ca. én grad celcius for hver hundrede meter stigning. Resultatet kan sammenlignes med "US Standard Atmosphere (1962)" citeret af Earl McCartney (*Optics of the Atmosphere*, Wiley & Sons, New York, 1976, side 83), hvor $h_{\frac{1}{2}}$ er omtrent 5600 meter. Altså den isothermiske model giver her en god overensstemmelse med virkeligheden.

Bemærk, at man umiddelbart kan finde en formel for massefylden $\rho(h)$. Benyt ligningen fra side 1:

$$\rho(h) = p(h) \cdot \frac{m}{k \cdot T} = \frac{m}{k \cdot T} \cdot p_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Hermed ser vi, at såvel luftens densitet som lufttrykket aftager eksponentielt med højden over havet.

Beregning af skalahøjden

Afslutningsvis kan vi beregne atmosfærens skalahøjde H_p . Kravet er, at det samlede antal molekyler per arealenhed fra havets overflade helt ud til rummet skal være lig med N_0 . Antalstætheden $N(h)$ er lig med densiteten $\rho(h)$ delt med middelmassen m af et enkelt luftmolekyle.

$$N(h) = \frac{\rho(h)}{m} = \frac{p_0}{k \cdot T} \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}} = N_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Ved hjælp af *integration* kan man summere antallet op fra $h = 0$ til $h = H_p$, og dette tal skal sættes lig med N_0 .

$$\int_0^{H_p} N_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}} dh = N_0 \cdot H_p$$

$$\left(-\frac{kT}{mg} \right) \cdot [e^{-\frac{mgh}{kT}}]_0^{H_p} = H_p$$

Når grænserne indsættes reduceres ovenstående til

$$\left(\frac{kT}{mg} \right) = H_p$$

Øvelse 4

Indsæt de fysiske størrelser og vis, at skalahøjden er lige lidt under 8 kilometer. Resultatet er meget anvendeligt, når man skal beregne ekstinktionen af solens direkte indstråling, når den passerer gennem atmosfæren.

Øvelse 5

Beregn antalstætheden (molekyler/kubikmeter) ved havoverfladen under STP. Hvad bliver antalstætheden på toppen af Mount Everest, hvor højden $h = 8850$ meter? Hvad er trykket i atmosfære?

