

DIFFERENTIALREGNING

Hvorfor er himlen blå?

Differentialregning - Rayleigh spredning - oki.wpd

INDLEDNING

Hvem har ikke betragtet den flotte blå himmel på en klar dag og beundret den? Men hvorfor er himlen blå? Disse sider skal forsøge at løfte sløret for, hvorfor det er tilfældet. Samtidig er emnet et godt eksempel på anvendelsen af det, som I har lært om differentialregning.



Fra toppen af Mount Everest ses et klart eksempel på Rayleigh spredning af solens lys ved atmosfærens luftmolekyler.

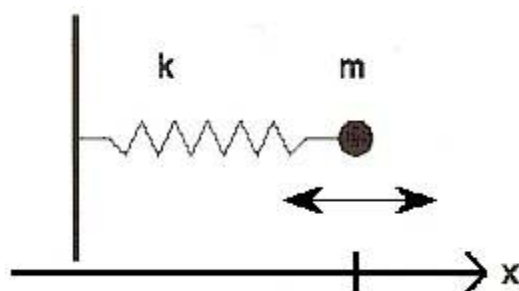
LYS OG LUFT

Betragt et luftmolekyle, der vekselvirker med lys, altså stråling i området fra omkring 300 til 3000 nanometer. Lys er jo elektromagnetiske svingninger, og især luftmolekylernes ydre elektroner udsættes for elektriske kraftpåvirkninger af lyset. Luftens molekyler består af ca. 78% kvælstof og 21% ilt plus sporgasser. Lysets svingningsfrekvens f er givet ved

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{L}$$

hvor c er lysets hastighed, og L er bølgelængden. Elektronerne sættes i tvungne svingninger. Kraften F , som det svingende elektriske felt $E \cos(\omega t)$ udøver på elektronerne (med ladning e og masse m) er givet ved

$$F = e E \cos(\omega t)$$



Newtons anden lov siger, at kraftpåvirkningen på et legeme med masse m er givet ved:

$$F = m a = m \, d^2x/dt^2$$

hvor $a = d^2x/dt^2$ er legemets acceleration. Bemærk, at accelerationen er den anden afledede af positionen x med hensyn til tiden t . Ud over kraftpåvirkningen fra det elektriske felt er der en kraftpåvirkning fra molekylet, hvortil elektronen er bundet, idet man som første approksimation kan antage, at Hookes lov ($F = -kx$) gælder. Den samlede kraftpåvirkning på elektronen er således:

$$-kx + eE \cos(\omega t)$$

hvor k er bestemt af molekylet, og minustegnet er et udtryk for, at elektronen tvinges tilbage mod molekylet, når der kommer et udslag bort fra eller mod det. Lidt i samme stil som en fjeder og et lod, der svinger.

Bruger vi nu Newtons anden lov, fås:

$$m \, d^2x/dt^2 = -kx + eE \cos(\omega t)$$

Ligesom en fjeder og et lod i svingninger har en karakteristisk svingningsfrekvens, gælder det samme for den svingende elektron i molekylet. Man plejer at anvende begrebet “vinkelfrekvens” ω (omega), og for elektronen med massen m og fjederkonstanten k gælder:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Da der står ω_0 , er det et udtryk for, at der er tale om elektronens “egenfrekvens”, altså frekvensen, som elektronen med denne masse og k -værdi “helst” vil svinge med. Når der bare står omega (ω), er der i stedet tale om lysstrålens vinkelfrekvens.

Som nævnt er sammenhængen mellem den almindelige frekvens f , der måles i Hz, og vinkelfrekvensen ω : $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$. Bemærk, at vinkelfrekvensens enheder er radianer per sekund.

DIFFERENTIALLIGNINGEN

Nu da den fysiske baggrundsforklaring er på plads, kan vi tage fat på matematikken, nemlig differentiaalligningen. Her er der tale om en ren matematisk opgave. Når opgaven er løst, skal løsningen fortolkes i forhold til den fysiske verden, vi gerne vil forklare: “hvorfør himlen er blå.” Dette er et godt eksempel på en matematisk model eller hypotese, der skal anvendes til at beskrive vore omgivelser. Det er så afgørende, om modellens forudsigelser siden kan bekræftes ved hjælp af observationer.

Påstanden her er, at løsningen til differentialligningen, som vi har fundet frem til, er følgende:

$$x(t) = \frac{e E}{m \omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)} \cos(\omega t)$$

For at eftervise, at det er korrekt, at denne funktion faktisk er en løsning til differentialligningen, skal udtrykket indsættes i ligningen for at se, om ligningen så går op. Vi får i denne forbindelse brug for den anden afledede d^2x/dt^2 . Husk på, at den eneste variabel i det lange udtryk er tiden t , og at cosinus differentieret giver minus sinus. Desuden: sinus differentieret giver cosinus.

$$dx/dt = \frac{e E}{m \omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)} (-\omega \sin(\omega t))$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e E}{m \omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)} (-\omega^2 \cos(\omega t))$$

Hele den konstante størrelse foran sker der jo ikke noget med, da den er ikke afhængig af tiden. Nu indsættes d^2x/dt^2 og $x(t)$ i vores differentialligning for at se, om vi kan få det til at passe:

$$m \frac{e E}{m \omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)} (-\omega^2 \cos(\omega t)) = -k \frac{e E}{m \omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)} (\cos(\omega t)) + e E \cos(\omega t)$$

Dette ser en lille smule afskrækkende ud, men det viser sig, at det slet ikke er så slemt alligevel. Der er nemlig flere faktorer, der går igen i hvert led, og dem kan vi så slette alle steder:

Led 1: m i tælleren går ud mod m i nævneren; desuden kan $e E \cos(\omega t)$ slettes, da denne størrelse går igen i alle tre led.

Led 2: igen kan vi slette $e E \cos(\omega t)$. Desuden svarer k/m til ω_0^2 .

Led 3: $e E \cos(\omega t)$ kan divideres væk, så der kun står et éttal tilbage.

Hermed bliver det hele reduceret til:

$$\frac{-\omega^2}{\omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)} = \frac{-\omega_0^2}{\omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)} + 1$$

Vi udvider det sidste led (éttallet), så vi får en fælles nævner:

$$\frac{-\omega^2}{\omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)} = \frac{-\omega_0^2}{\omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)} + \frac{\omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)}{\omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)}$$

Nu kan fællesnævneren fjernes ved at gange det hele igennem med nævneren, så man finder:

$$-\omega^2 = -\omega_0^2 + \omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)$$

Nu lysner det! Vis nu selv, at ved at gange færdig bliver venstre side og højre side netop éns:

(Din udregning:)

Vi har dermed vist, at den påståede løsning til DL'en virkelig duer.

LØSNINGEN FORENKLES

$$x(t) = \frac{e E}{m \omega_0^2 (1 - \omega^2/\omega_0^2)} \cos(\omega t)$$

er jo vores løsning. Men læg mærke til, at hvis lysets frekvens ω er meget mindre end elektronens resonansfrekvens ω_0 (frekvensen, som elektronen helst vil svinge med), så vil brøken ω^2/ω_0^2 være meget mindre end 1. I så fald kan løsningen forenkles til:

$$x(t) = \frac{e E}{m \omega_0^2} \cos(\omega t)$$

I de videnskabelige fag gør man ofte det, at man forenkler sine formler for at gøre dem lettere at arbejde med - med skyldig hensyntagen til, at vigtige informationer ikke smides væk. Som Einstein har sagt "Man bør gøre sin beskrivelse så enkel som muligt - men heller ikke enklere." Accelerationen med denne forenkling bliver (idet vi igen differentierer to gange):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{e E \omega^2}{m \omega_0^2} \cos(\omega t)$$

ACCELERERET LADNING UDSENDER STRÅLING

Det kan være, at du spørger dig selv, hvor blev det blå lys af i alt dette? Det kommer nu her, fordi accelererede ladninger udsender stråling (jfr. TV, mobiltelefon, radio, mm.). Det er vist (af Heinrich Hertz), at denne udstrålings effekt W er givet ved formlen:

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{4 \pi \epsilon_0 c^3}$$

hvor a er elektronens acceleration, c er lysets hastighed og ϵ_0 er en kon-

stant (vacuum permittiviteten). Men vi kender jo accelerationen a , og den kan så indsættes her, så:

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 c^3} \left(\frac{e E \omega^2}{m \omega_0^2} \cos(\omega t) \right)^2$$

Vil man finde effektens middelværdi $\langle W \rangle$ over en hel svingning, skal man anvende, at middelværdien af cosinus $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$. Dette er nemt at indse ved at betragte begge sider af ligningen $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$. Alle de andre størrelser er blot konstanter, som man skal reducere. Hermed bliver effektens middelværdi:

$$\langle W \rangle = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 c^3} \left(\frac{e^2 E^2 \omega^4}{m^2 \omega_0^4} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

Vinkelfrekvensen omregnes, således at vi får lysets bølgelængde L ind i billedet:

$$\omega = 2 \pi f = 2 \pi c/L$$

Til sidst indsættes omega, og hele udtrykket reduceres. Prøv selv at vise, at:

$$\langle W \rangle = \frac{4}{3} \frac{\pi^3 e^4 c}{\epsilon_0 m^2 \omega_0^4 L^4} E^2$$

Læg mærke til, at der indgår L^4 i nævneren. Altså er genudstrålingen af energien fra luftmolekylernes svingende elektroner omvendt proportional med lysets bølgelængde i fjerde potens. Når lys spredes som her beskrevet, taler man om Rayleigh spredning af lyset ved luftens molekyler.

OPGAVE: Gå på internettet og søg på Rayleigh scattering, blue sky, mm. Se hvor meget du nu forstår efter gennemgangen af disse sider.

Betragt nu rødt lys med en bølgelængde $L = 600$ nanometer og UV lys med $L = 300$ nm. Hvad bliver forskellen på lysets spredning ved disse to bølgelængder?

Alt andet lige fås for rødt lys en faktor $1/600^4$ og for UV lys faktoren $1/300^4$. Ser



Det synlige lys dækker et spektralområde fra 400 (violet) til 800 (mørkerød) nanometer. Derudover findes der ultraviolet (UV) lys (300-400 nm) og nær infrarødt (NIR) lys (800-3000 nm).

man på forholdet mellem disse to tal, fås:

$$\frac{\text{spredning af UV lys}}{\text{spredning af rødt lys}} = \frac{\frac{1}{300^4}}{\frac{1}{600^4}} = \left(\frac{600}{300} \right)^4 = 2^4 = 16$$

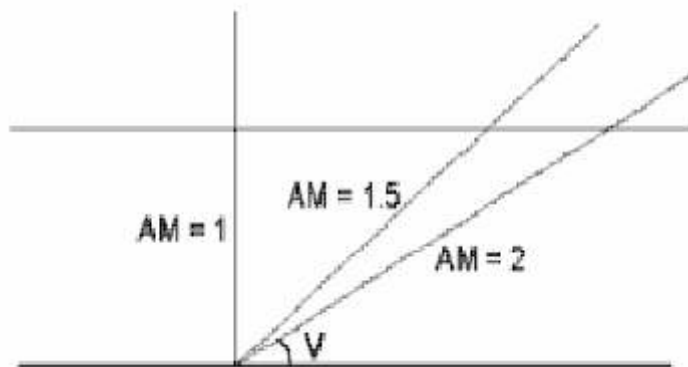
Altså spredningen af UV-lyset er 16 gange kraftigere end spredningen af rødt lys.

OPGAVE: Find selv forholdet mellem spredningen af blåt lys med en bølgelængde på 450 nm og rødt lys med en bølgelængde på 650 nm.

Da blåt lys spredes betydeligt mere end de rødlige farver, ser man den blå farve, når man kikker op på himlen. De gule og røde farver trænger bedre igennem atmosfæren uden spredning, og af denne grund opleves solskiven ved solnedgang som gul og rødlig, idet lyset da skal trænge igennem mange luftlag.

SPREDNINGSDATA FRA GRØNLAND

Som praktisk eksempel på virkningen af Rayleigh-spredning på solens indstråling, følger her et eksempel fra Thule Air Base (Pituffik) i den nordlige Grønland. Det drejer sig om målinger af den direkte solindstråling ved forskellige, bestemte bølgelængder. Mens solen (24 timer i døgnet) flytter sig på himlen, gennemløber den forskellige solelevationsvinkler, således at lyset fra solen gennemtrænger forskellige tykkelser af jordens atmosfære.

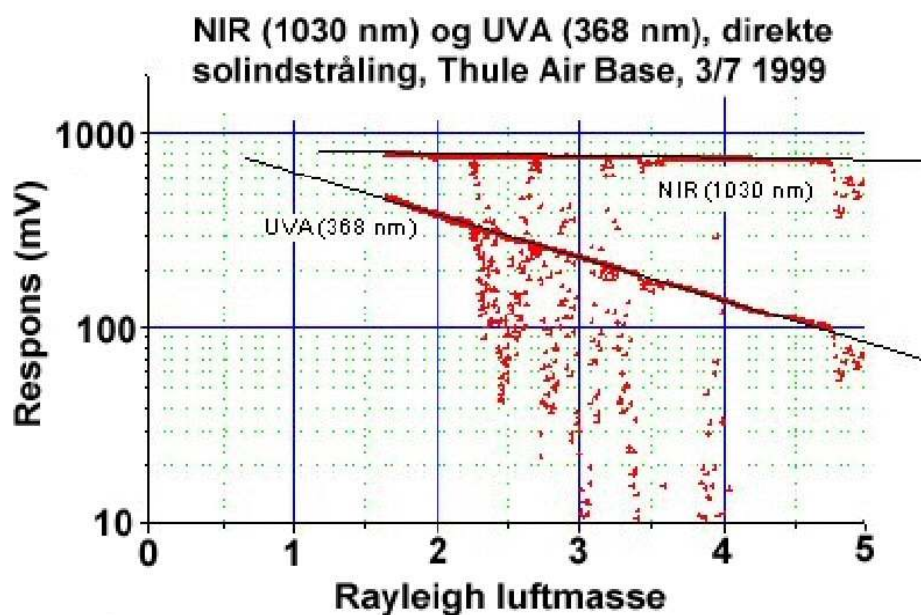


Forskellige solelevationsvinkler svarer til, at solens direkte stråling passerer gennem forskellige luftlagstykkelser ("air masses" AM).

Apparatet, der er vist i figuren på næste side, indeholder detektorer, der optager hver sin bølgelængde. To af kanalerne svarer til UV lys (368 nm) og NIR lys (1030 nm). Signaler for disse to kanaler er vist i den efterfølgende illustration.



Disse pyrheliosimetre er monteret på en solar tracker på en bakke syd for startbanen på Thule Air Base i Nordgrønland ($76,5^{\circ}\text{N}$). Trackeren drejer dagen igennem, så instrumenterne altid peger direkte mod solskiven. (Bemærk den flotte Rayleigh-spredning på himlen bag ved!)



Figuren viser data optaget ved hjælp af pyrheliosimetrene på trackeren. Læg mærke til, hvordan NIR-strålingen gennemtrænger atmosfæren næsten uden attenuation. Derimod bliver UV-strålingen kraftigt attenueret. Dette skyldes i høj grad Rayleigh-spredningen af den kortbølgede stråling. (Data fra Ph.D. afhandling, Frank Bason, Aarhus Universitet og DMI, 1999).

Bemærk, at prikkerne, der ligger under de rette linier i figuren, skyldes skypassager. Data på de rette linier svarer til klart solskin. Da de væsentlige data ligger på rette linier på semilogaritmisk papir, er der jo tale om eksponentielle udviklinger. Men det fører jo til en helt anden historie!